

РАСПАД ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТОЛБА МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОРИСТЫМ ЯДРОМ

Аннотация.

Актуальность и цели. Магнитные жидкости, не существующие в природе, получают искусственно – путем диспергирования наночастиц твердого ферромагнетика в обычной немагнитной жидкости. Магнитные жидкости нашли широкое применение в различных областях техники и технологии. В данной статье сформулирована и исследована математическая модель распространения и неустойчивости волн на поверхности цилиндрического столба магнитной жидкости бесконечной длины, окружающей коаксиально расположенное, бесконечно длинное ядро круглого сечения из неоднородного (слоистого) пористого материала.

Материалы и методы. Для решения задачи используются методы математической физики. Задача решается в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Учитывается наличие поверхностного натяжения. Сила тяжести предполагается отсутствующей.

Результаты. Записаны уравнения движения магнитной жидкости внутри и вне пористой среды, а также уравнения для магнитного поля. Сформулированы граничные условия для гидродинамических и магнитных величин на поверхностях раздела сред. Найдено полное решение краевой задачи для гидродинамических и магнитных величин. Проведен численный анализ полученного дисперсионного уравнения, описывающего распространение поверхностных волн. Найдены условия, при которых возмущения поверхности жидкого столба становятся неустойчивыми и приводят к его распаду на цепочку из соединенных капель.

Выводы. Размер капель, образующихся при распаде жидкого столба, увеличивается с ростом магнитного поля, т.е. магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на распад жидкого столба.

Ключевые слова: поверхностные волны, неустойчивость, магнитная жидкость, пористая среда, магнитное поле.

N. G. Taktarov, O. A. Runova

BREAKUP OF A CYLINDRICAL COLUMN OF MAGNETIC FLUID WITH A NON-HOMOGENEOUS POROUS CORE

Abstract.

Background. The magnetic fluids, not existing in nature, are synthesised artificially by means of dispersion of nanoparticles of solid ferromagnetic in the usual non-magnetic fluid. The magnetic fluids have found a broad application in different areas of technology. A mathematical model of waves propagation and instability on a surface of a cylindrical column of magnetic fluid of infinite length, surrounding a coaxial infinite long non-homogeneous (laminated) porous core of round section was constructed and studied.

Materials and methods. The authors used the methods of mathematical physics and solved the problem in a cylindrical coordinate system (r, θ, z) . The presence of the surface tension was taken into account. The gravity was neglected.

Results. The equations of motion of the magnetic fluids inside and outside of the porous medium and the equations for the magnetic field were written. The boundary conditions for hydrodynamic and magnetic quantities on interfaces of the mediums were formulated. The full solution of a boundary value problem for hydrodynamic and magnetic quantities was found. The numerical analysis of the dispersion equation that describes surface wave propagation was completed. The authors found the conditions, under which the disturbances of the fluid column surface become unstable and result in its fragmentation into a chain of connected droplets.

Conclusions. The size of droplets, occurring during fragmentation of the fluid column, increases with the growth of the magnetic field, i.e. magnetic field has a stabilizing effect on the fragmentation of the fluid column.

Key words: surface waves, instability, magnetic fluid, porous medium, magnetic field.

Введение

Магнитные жидкости синтезируют искусственно путем коллоидного растворения наночастиц твердого ферромагнетика в обычной немагнитной жидкости [1]. Обладая способностью к намагничиванию, такие жидкости взаимодействуют с приложенным магнитным полем, которое способно влиять на их движение. На этом свойстве основаны разнообразные практические применения магнитных жидкостей в различных областях техники и технологии. В связи с этим представляет интерес изучение движения магнитных жидкостей в различных конкретных случаях. Так, например, задача об устойчивости и распаде струи магнитной жидкости решена в [2]. Как известно, струи магнитных чернил, управляемых магнитным полем, используются в струйных принтерах.

Для различных практических приложений представляет интерес изучение движения жидкостей в пористой среде при наличии электрического или магнитного поля. Распространение волн на заряженной поверхности жидкого проводника, контактирующего с пористой средой, рассмотрено в [3, 4].

Неустойчивость и распад столба магнитной жидкости, окружающей однородное пористое ядро цилиндрической формы, исследовано в [5]. В данной статье рассматривается обобщение этой задачи на случай неоднородного (слоистого) твердого ядра, состоящего из внутреннего сплошного цилиндра и окружающей его коаксиально расположенной пористой цилиндрической оболочки.

1. Постановка задачи

Предполагается, что внутри бесконечно длинного цилиндрического столба магнитной жидкости находится неоднородное (слоистое) твердое ядро, состоящее из двух частей: внутреннего коаксиально расположенного круглого сплошного цилиндра и окружающего соосного с ним круглого цилиндрического слоя, состоящего из однородного пористого материала. Учитывается наличие поверхностного натяжения. Сила тяжести предполагается отсутствующей. Вектор $\mathbf{H}_0$ напряженности однородного приложенного магнитного поля параллелен оси твердого ядра. Задача решается в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , ось z которой направлена по общей оси твердого и жидкого цилиндров. Радиусы сплошного цилиндрического ядра,

внешней поверхности пористого слоя и невозмущенной цилиндрической поверхности обозначим a_1 , a_2 и a_0 соответственно. Величины, относящиеся к сплошному ядру ($0 \leq r < a_1$), пористому слою ($a_1 < r < a_2$), свободной жидкости ($a_2 < r < a_0$) и воздушному пространству вне жидкости ($a_0 < r < \infty$) обозначаются в необходимых случаях индексами 1, 2, 3 и 4 соответственно. Магнитные проницаемости μ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) в областях 1, 2, 3 и 4 предполагаются постоянными ($\mu_4 = 1$). Магнитная проницаемость среды в области 2 (пористый материал, насыщенный жидкостью) находится по формуле $\mu_2 = \mu_3 \Gamma + \mu_s (1 - \Gamma)$, где μ_s – проницаемость пористого материала; Γ – пористость (отношение объема пор ко всему элементарному объему среды). Предполагается, что $\Gamma = \text{const}$. В общем случае $\mu_s \neq \mu_1$.

Уравнения движения магнитной жидкости в пористой среде при сделанных предположениях имеют вид [1, 5]:

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = -\text{grad } p_2 - \frac{\eta}{K} \mathbf{u}_2, \quad \text{div } \mathbf{u}_1 = 0, \quad (1)$$

здесь ρ – плотность жидкости; p_2 – давление; $\mathbf{u}_2$ – макроскопическая скорость фильтрации, определяется как объемный поток жидкости на единицу площади в пористой среде; η – вязкость; K – коэффициент проницаемости пористой среды.

Предполагая, что амплитуда поверхностной волны значительно меньше ее длины, уравнения движения свободной жидкости вне пористой среды запишем в линейном приближении [6, с. 55]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial t} = -\text{grad } p_3, \quad \text{div } \mathbf{u}_3 = 0, \quad (2)$$

здесь $\mathbf{u}_3$ – скорость жидкости. В области 1 следует положить $\mathbf{u}_1 \equiv 0$.

Уравнения для магнитного поля в неэлектропроводной среде [7]:

$$\text{rot } \mathbf{H}_j = 0, \quad \text{div } \mu_j \mathbf{H}_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (3)$$

Из уравнений (1)–(3) следует

$$\mathbf{u}_2 = \text{grad } \phi_2, \quad \mathbf{u}_3 = \text{grad } \phi_3, \quad \mathbf{H}_j = \text{grad } \psi_j, \quad (4)$$

$$\Delta \phi_2 = 0, \quad \Delta \phi_3 = 0, \quad \Delta \psi_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Далее все величины будем записывать в виде

$$p_2 = p_{20} + p_{2w}, \quad p_3 = p_{30} + p_{3w}, \quad \mathbf{H}_j = \mathbf{H}_{j0} + \mathbf{H}_{jw}, \quad (5)$$

$$\psi_j = \psi_{j0} + \psi_{jw} = z H_{j0} + \psi_{jw},$$

здесь индексами 0 и w обозначены соответственно невозмущенные величины и малые возмущения, связанные с волной; $\mathbf{H}_{10} = \mathbf{H}_{20} = \mathbf{H}_{30} = \mathbf{H}_{40} \equiv \mathbf{H}_0$. Возмущения ψ_{iw} также должны удовлетворять уравнениям Лапласа (4).

Граничные условия на соответствующих поверхностях раздела имеют вид [5–7]:

- 1) $u_{2r} = 0$ при $r = a_1$ (на твердой поверхности);
- 2) $\psi_1 = \psi_2$ при $r = a_1$;
- 3) $\mu_1 \mathbf{n} \cdot \text{grad} \psi_1 = \mu_2 \mathbf{n} \cdot \text{grad} \psi_2$ при $r = a_1$;
- 4) $u_{2r} = u_{3r}$ при $r = a_2$ (на внешней границе пористой среды);
- 5) $\psi_2 = \psi_3$ при $r = a_2$;
- 6) $\mu_2 \mathbf{n} \cdot \text{grad} \psi_2 = \mu_3 \mathbf{n} \cdot \text{grad} \psi_3$ при $r = a_2$;
- 7) $p_2 - \frac{\mu_2}{4\pi} H_{2n}^2 + \frac{\mu_2}{8\pi} \mathbf{H}_2^2 = p_3 - \frac{\mu_3}{4\pi} H_{3n}^2 + \frac{\mu_3}{8\pi} \mathbf{H}_{3n}^2$ при $r = a_2$;
- 8) $u_{3r} = \frac{d\xi}{dt}$ при $r = a_0 + \xi$ (на свободной поверхности жидкости);
- 9) $\psi_3 = \psi_4$ при $r = a_0 + \xi$;
- 10) $\mu_3 \mathbf{n} \cdot \text{grad} \psi_3 = \mu_4 \mathbf{n} \cdot \text{grad} \psi_4$ при $r = a_0 + \xi$;
- 11) $p_3 - \frac{\mu_3}{4\pi} H_{3n}^2 + \frac{\mu_3}{8\pi} \mathbf{H}_{3n}^2 - \left(p_4 - \frac{\mu_4}{4\pi} H_{4n}^2 + \frac{\mu_4}{8\pi} \mathbf{H}_{4n}^2 \right) = 2\alpha C_m$ при

$r = a_0 + \xi$;

- 12) возмущение потенциала ψ_4 на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) равно нулю.

Здесь $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к соответствующей поверхности; C_m – средняя кривизна поверхности жидкости; α – коэффициент поверхностного натяжения; $r = a_0 + \xi(\theta, z, t)$ – уравнение искривленной поверхности жидкости ($\xi \ll a_0$).

Невозмущенные (равновесные) величины также должны удовлетворять граничным условиям (6) в предположении, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = 0$ и $\xi = 0$, а все $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0$.

Как известно из дифференциальной геометрии, выражения для $\mathbf{n}$ и C_m для слабodeформированной цилиндрической поверхности в линейном приближении имеют вид

$$\mathbf{n} = (n_r, n_\theta, n_z) = \left(1, -\frac{1}{a_0} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}, -\frac{\partial \xi}{\partial z} \right),$$

$$2C_m = \frac{1}{a_0} - \left(\frac{\xi}{a_0^2} + \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right). \quad (7)$$

На недеформированной цилиндрической поверхности $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$.

Для возмущений давления из (1) и (2) с учетом (4) находим

$$p_{2w} = -\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{\eta}{K} \phi_2, \quad p_{3w} = -\rho \frac{\partial \phi_3}{\partial t}. \quad (8)$$

Граничные условия (6) с учетом (7) в линейном приближении в силу равновесных граничных условий принимают вид

- 1) $\frac{\partial \phi_2}{\partial r} = 0$;
- 2) $\psi_{1w} = \psi_{2w}$;

$$\begin{aligned}
 &3) \mu_1 \frac{\partial \psi_{1w}}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial r}; \\
 &4) \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}; \\
 &5) \psi_{2w} = \psi_{3w}; \\
 &6) \mu_2 \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial r} = \mu_3 \frac{\partial \psi_{3w}}{\partial r}; \\
 &7) p_{2w} + \frac{\mu_2}{4\pi} H_0 \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial z} = p_{3w} + \frac{\mu_3}{4\pi} H_0 \frac{\partial \psi_{3w}}{\partial z}; \\
 &8) \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial t}; \\
 &9) \psi_{3w} = \psi_{4w}; \\
 &10) \mu_3 \left(H_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{3w}}{\partial r} \right) = \mu_4 \left(H_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{4w}}{\partial r} \right); \\
 &11) p_{3w} + \frac{\mu_3}{4\pi} H_0 \frac{\partial \psi_{3w}}{\partial z} - \frac{\mu_4}{4\pi} H_0 \frac{\partial \psi_{4w}}{\partial z} = -\alpha \left(\frac{\xi}{a_0^2} + \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right); \\
 &12) \psi_{4w} = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Кроме того, на оси сплошного цилиндра ($r=0$) решения уравнений должны быть конечными.

В граничных условиях (9) величины p_{2w} и p_{3w} имеют вид (8).

Математическая модель является, таким образом, краевой задачей, состоящей из уравнений Лапласа (4) и граничных условий (9).

2. Решение краевой задачи

Решение уравнений (4) с граничными условиями (9) ищем в виде бегущих затухающих (либо нарастающих) волн:

$$\begin{aligned}
 &\{\varphi_2, \varphi_3, \psi_{1w}, \psi_{2w}, \psi_{3w}, \psi_{4w}, \xi\} = \\
 &= \{\varphi_2^*(r), \varphi_3^*(r), \psi_{1w}^*(r), \psi_{2w}^*(r), \psi_{3w}^*(r), \psi_{4w}^*(r), \xi^*\} \times \\
 &\quad \times \exp(-\gamma t + ikz + im\theta),
 \end{aligned} \tag{10}$$

здесь $\varphi_1^*(r)$, $\varphi_2^*(r)$, $\psi_{jw}^*(r)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) – неизвестные амплитуды; $k = 2\pi/\lambda$ – продольное волновое число; λ – длина волны, $m = 0, 1, 2, \dots$ – азимутальное волновое число; $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$ – комплексная величина; $\omega = |\gamma_i|$ – частота; $\beta = \gamma_r$ – коэффициент, который может быть как положительным (при затухании возмущения), так и отрицательным (при неустойчивости, приводящей к нарастанию возмущения).

Подставляя выражения (10) для φ_i и ψ_{jw} в уравнения Лапласа (4) в цилиндрических координатах, получим систему из шести модифицированных уравнений Бесселя порядка m для амплитуд, решения которых имеют вид

$$\Phi_2^* = C_1 I_m(kr) + C_2 K_m(kr), \quad \Phi_3^* = C_6 I_m(kr) + C_7 K_m(kr),$$

$$\Psi_{1w}^* = C_3 I_m(kr), \quad \Psi_{2w}^* = C_4 I_m(kr) + C_5 K_m(kr),$$

$$\Psi_{3w}^* = C_8 I_m(kr) + C_9 K_m(kr), \quad \Psi_{4w}^* = C_{10} K_m(kr),$$

здесь I_m и K_m – модифицированные функции Бесселя первого и второго родов порядка m ; $C_1, \dots, C_{10}$ – неизвестные коэффициенты.

Эти решения записаны с учетом свойств функций Бесселя: $I_m(kr) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ и $K_m(kr) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. В связи с этими свойствами бесконечно большие слагаемые в решениях отброшены.

Для амплитуд граничные условия (9) принимают вид:

- 1) $C_1 I_m'(ka_1) + C_2 K_m'(ka_1) = 0$;
- 2) $C_3 I_m(ka_1) = C_4 I_m(ka_1) + C_5 K_m(ka_1)$;
- 3) $\mu_1 C_3 I_m'(ka_1) = \mu_2 C_4 I_m'(ka_1) + \mu_2 C_5 K_m'(ka_1)$;
- 4) $C_1 I_m'(ka_2) + C_2 K_m'(ka_2) = C_6 I_m'(ka_2) + C_7 K_m'(ka_2)$;
- 5) $C_4 I_m(ka_2) + C_5 K_m(ka_2) = C_8 I_m(ka_2) + C_9 K_m(ka_2)$;
- 6) $\mu_2 C_4 I_m'(ka_2) + \mu_2 C_5 K_m'(ka_2) = \mu_3 C_8 I_m'(ka_2) + \mu_3 C_9 K_m'(ka_2)$;
- 7)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho\gamma}{\Gamma} - \frac{\eta}{K} \right) [C_1 I_m(ka_2) + C_2 K_m(ka_2)] + \\ & + \frac{\mu_2 H_0 i k}{4\pi} [C_4 I_m(ka_2) + C_5 K_m(ka_2)] = \\ & = \rho\gamma [C_6 I_m(ka_2) + C_7 K_m(ka_2)] + \frac{\mu_3 H_0 i k}{4\pi} [C_8 I_m(ka_2) + C_9 K_m(ka_2)]; \\ & 8) \quad k C_6 I_m'(ka_0) + k C_7 K_m'(ka_0) = -\gamma \xi^*; \\ & 9) \quad C_8 I_m(ka_0) + C_9 K_m(ka_0) = C_{10} K_m(ka_0); \\ & 10) \quad \mu_3 [-H_0 i \xi^* + C_8 I_m'(ka_0) + C_9 K_m'(ka_0)] = \mu_4 [-H_0 i \xi^* + C_{10} K_m'(ka_0)]; \\ & 11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho\gamma [C_6 I_m(ka_0) + C_7 K_m(ka_0)] + \frac{\mu_3 H_0 i k}{4\pi} [C_8 I_m(ka_0) + C_9 K_m(ka_0)] - \\ & - \frac{\mu_4 H_0 i k}{4\pi} C_{10} K_m(ka_0) = -\frac{\alpha \xi^*}{a_0^2} (1 - m^2 - a_0^2 k^2). \end{aligned}$$

Здесь i – мнимая единица, штрихами обозначены производные. Граничное условие 12 из (9) удовлетворяется тождественно в силу того, что $K_m(kr) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Находя неизвестные коэффициенты $C_1, \dots, C_{10}$ из первых десяти уравнений (11), считая при этом амплитуду волны ξ^* заданной и подставляя затем эти коэффициенты в одиннадцатое уравнение, полу-

чим дисперсионное соотношение для поверхностных волн, кубическое относительно γ :

$$A_1\gamma^3 + A_2\gamma^2 + A_3\gamma + A_4 = 0. \quad (12)$$

Коэффициенты $A_1, \dots, A_4$ не выписываем ввиду их громоздкости.

Другой способ нахождения дисперсионного соотношения (12) заключается в приравнивании к нулю определителя линейной системы (11) с одиннадцатью неизвестными $C_1, \dots, C_{10}, \xi^*$.

Уравнение (12) кубическое и может быть приведено к так называемому неполному кубическому уравнению $x^3 + px + q = 0$ [8] с дискриминантом $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$, где p и q выражаются через коэффициенты $A_1, \dots, A_4$. При условии $D > 0$ существует волновое движение, поскольку уравнение (12) имеет при этом два комплексно сопряженных корня. При $D \leq 0$ волновых движений нет, так как все три корня уравнения (12) действительные.

3. Анализ модели

Числовые расчеты с дисперсионным уравнением (12) проводились для следующих значений параметров: $\rho = 1$ г/см³; $\alpha = 20$ г/с²; $\eta = 0,01$ г/см · с; $\Gamma = 0,8$; $K = 0,02$ см²; $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 1,8$; $\mu_3 = 2$; $\mu_4 = 1$; $\mu_s = 1$.

Вместо размерных величин ω , β и k введем безразмерные:

$$\omega^* = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha/(\rho a_0^3)}}, \quad \beta^* = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha/(\rho a_0^3)}}, \quad k^* = ka_0.$$

На графиках зависимости ω^* и β^* от k^* область значений аргумента k^* делится на два интервала критической точкой $k^* = k_c^*$ ($\lambda_c = 2\pi/k_c$), которая находится из условия равенства дискриминанта нулю ($D = 0$). В точке k_c^* выполняются условия: $\omega^*(k_c^*) = 0$ и $\beta^*(k_c^*) = 0$.

При этом в интервале $0 < k^* < k_c^*$ происходит нарастание возмущений ($\beta^* < 0$) и волны отсутствуют. Амплитуда возмущений растет с наибольшей скоростью при $k^* = k_m^*$, при котором $|\beta^*|$ достигает максимума. Размер (длина) образующихся при распаде жидкого столба капель равен $\lambda_m \approx 2\pi/k_m$ ($k_m = k_m^*/a_0$). При $k^* \rightarrow k_c^*$ движение жидкости замедляется, т.е. $\omega^* \rightarrow 0$, $\beta^* \rightarrow 0$. В области $k^* > k_c^*$ выполняется условие $D > 0$ и существуют затухающие $\beta^* > 0$ волны.

На рис. 1 приведены графики зависимости величин ω^* и β^* от k^* при $m = 0$ (осесимметричные возмущения); $H_0 = 20$ эрстед (Э); $a_1 = 1$ см; $a_2 = 1,5$ см для нескольких значений a_0 . Пересечение графиков с осью Ok^*

происходит в точке k_c^* . Видно, что при всех значениях радиуса a_0 жидкого цилиндра и фиксированных значениях прочих параметров частота ω^* является монотонно возрастающей функцией волнового числа k^* . Коэффициент затухания β^* принимает максимальное значение при некотором k^* .

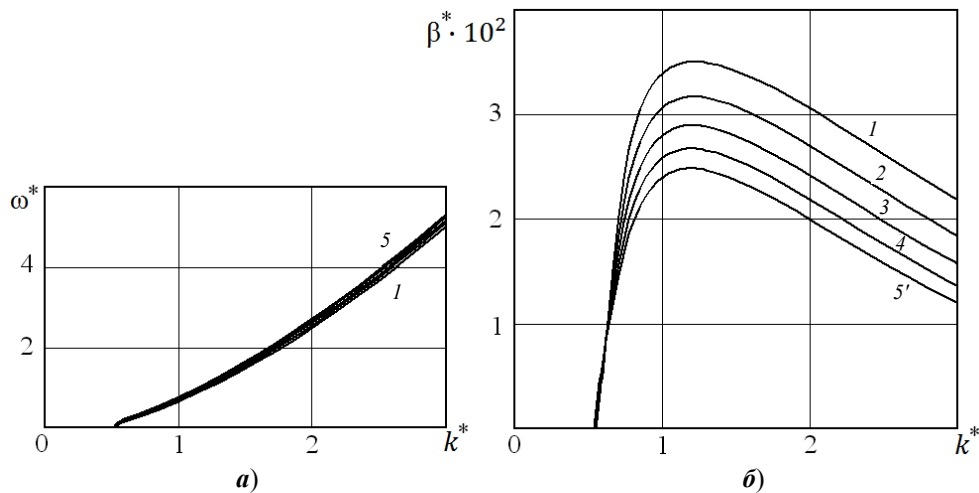


Рис. 1. Зависимость безразмерной частоты ω (а) и коэффициента затухания β (б) от волнового числа k : $a = 2; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4$ см (1–5); $a = 1$ см; $a = 1,5$ см; $m = 0$; $H = 20$ Э

В случае $m = 1$ частота больше, а затухание сильнее, чем при $m = 0$ при одинаковых значениях прочих параметров. Для $m \geq 2$ движение является апериодическим, с сильным затуханием всех возмущений.

На рис. 2 приведены графики зависимости ω^* и β^* от k^* при $m = 0$; $H_0 = 20$ Э; $a_1 = 1$ см; $a_0 = 2$ см для нескольких значений a_2 . Видно, что частота ω^* уменьшается с увеличением радиуса a_2 пористого цилиндра (при фиксированном k^*). Затухание волн усиливается с ростом a_2 в связи с утолщением пористого слоя.

На рис. 3 приведены графики зависимости ω^* и β^* от k^* при $m = 0$; $H_0 = 20$ Э; $a_2 = 1,5$ см; $a_0 = 2$ см для нескольких значений a_1 . Видно, что частота ω^* увеличивается с возрастанием радиуса a_1 твердого цилиндра (при фиксированном k^*). Затухание волн уменьшается с ростом a_1 в связи с уменьшением толщины пористого слоя.

На рис. 4 приведены графики зависимости ω^* и β^* от k^* при $m = 0$; $a_1 = 1$ см; $a_2 = 1,5$ см; $a_0 = 2$ см для нескольких значений напряженности магнитного поля H_0 . Видно, что с ростом H_0 частота увеличивается при каждом зафиксированном значении k^* .

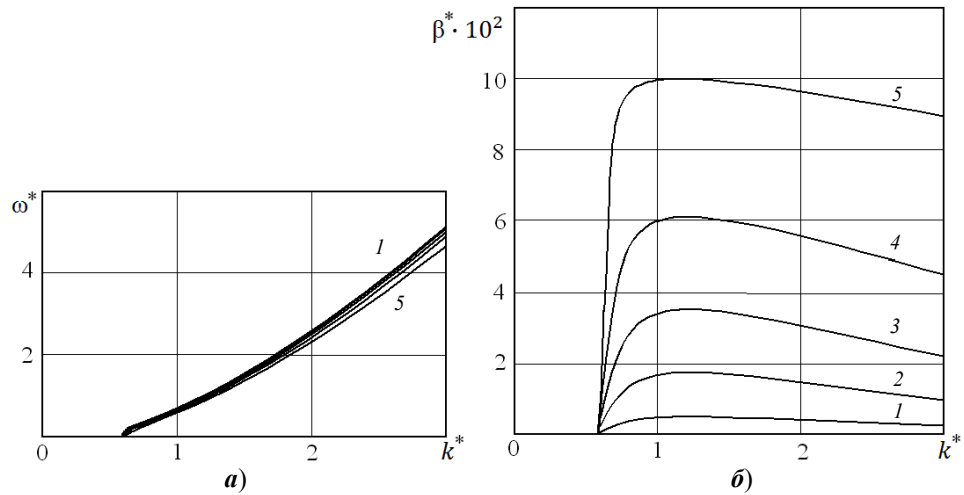


Рис. 2. Зависимость безразмерной частоты ω (а) и коэффициента затухания β (б) от волнового числа k : $a = 1,1; 1,3; 1,5; 1,7; 1,9$ см (1–5);
 $a = 1$ см; $a = 2$ см; $m = 0$; $H = 20$ Э

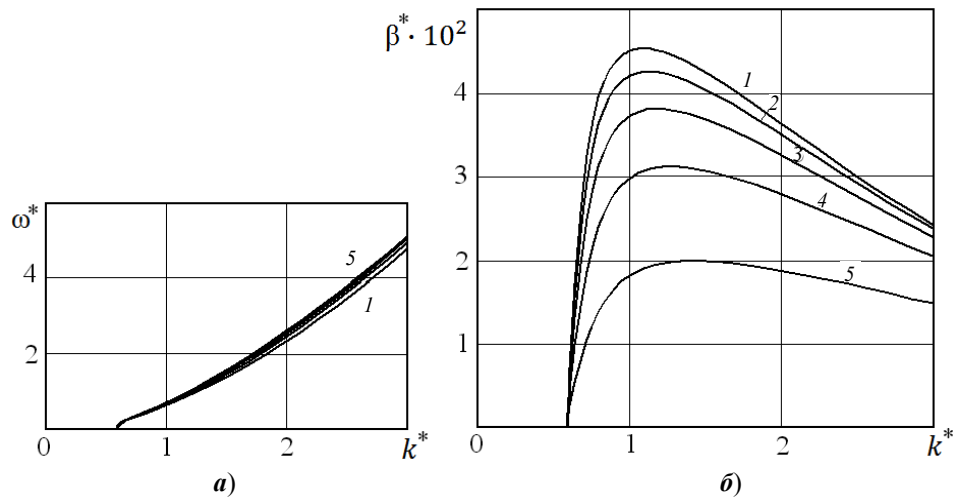


Рис. 3. Зависимость безразмерной частоты ω (а) и коэффициента затухания β (б) от волнового числа k : $a = 0,5; 0,7; 0,9; 1,1; 1,3$ см (1–5);
 $a = 1,5$ см; $a = 2$ см; $m = 0$; $H = 20$ Э

Влияние изменения H_0 на затухание волны имеет более сложный характер. С ростом H_0 величина k_c^* уменьшается, что равносильно увеличению критической длины волны $\lambda_c = 2\pi/k_c$. Это означает, что с ростом магнитного поля неустойчивость сдвигается в область волн с большей длиной, т.е. магнитное поле способно стабилизировать коротковолновые возмущения поверхности жидкого столба, затрудняя тем самым его распад на капли.

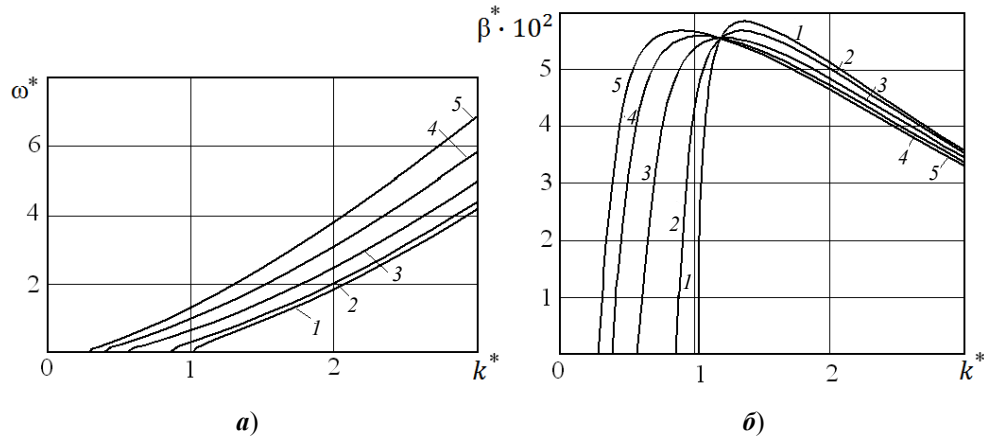


Рис. 4. Зависимость безразмерной частоты ω (а) и коэффициента затухания β (б) от волнового числа k : $H = 0; 10; 20; 30; 40$ Э (1–5); $a = 1$ см; $a = 1,5$ см; $a = 2$ см; $m = 0$

Закключение

Исследованы распространение и неустойчивость волн на поверхности цилиндрического столба магнитной жидкости, окружающей неоднородное (слоистое) пористое ядро. Рассмотрена область длинных волн ($0 < k^* < 3$), которая при симметричных возмущениях ($m = 0$) делится критической точкой k_c^* на два интервала. В интервале $0 < k^* < k_c^*$ происходит апериодическое движение ($\beta^* < 0$) с нарастающей амплитудой, приводящее к распаду жидкого столба на цепочку из соединенных между собой капель, длина которых приблизительно равна $\lambda_m = 2\pi/k_m$ ($k_m = k_m^*/a_0$). В интервале $k_c^* < k^* < 3$ существует затухающее волновое движение ($\beta^* > 0$).

Показано, что в интервале существования волнового движения частота ω^* является монотонно возрастающей функцией от волнового числа k^* при всех значениях радиуса a_0 жидкого цилиндра и фиксированных прочих параметрах. Коэффициент β^* принимает максимальное значение при некотором k^* .

При возрастании a_2 и фиксированных прочих параметрах величина ω^* уменьшается, а β^* возрастает при каждом заданном k^* .

С увеличением a_1 и фиксированных прочих параметрах величина ω^* возрастает, а β^* уменьшается при каждом заданном k^* .

При возрастании напряженности магнитного поля H_0 и фиксированных прочих параметрах частота увеличивается при каждом заданном k^* . Коэффициент β^* изменяется при этом более сложным образом. С ростом H_0

критическая длина волны $\lambda_c = 2\pi/k_c$ ($k_c = k_c^*/a_0$) увеличивается. Следовательно, с ростом магнитного поля неустойчивость сдвигается в область более длинных волн, т.е. магнитное поле стабилизирует коротковолновые возмущения поверхности жидкого столба.

Список литературы

1. **Розенцвейг, Р.** Феррогидродинамика / Р. Розенцвейг. – М. : Мир, 1989. – 356 с.
2. **Тактаров, Н. Г.** Распад струи магнитной жидкости / Н. Г. Тактаров // Магнитная гидродинамика. – 1975. – № 2. – С. 35–38.
3. **Тактаров, Н. Г.** Математическое моделирование поверхностных волн в слое жидкости с поверхностным зарядом на пористом основании / Н. Г. Тактаров, С. М. Миронова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 41–48.
4. **Миронова, С. М.** Распространение волн на заряженной поверхности цилиндрического столба жидкости, окружающей длинное пористое ядро / С. М. Миронова, Н. Г. Тактаров // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2012. – № 4. – С. 104–110.
5. **Егерева, Э. Н.** Неустойчивость и распад столба магнитной жидкости, окружающей длинное пористое ядро / Э. Н. Егерева, О. А. Рунова, Н. Г. Тактаров // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2015. – № 1. – С. 182–191.
6. **Ландау, Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 1986. – 735 с.
7. **Ландау, Л. Д.** Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2000. – 736 с.
8. **Курош, А. Г.** Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1975. – 431 с.

References

1. Rozentsveyg R. *Ferrogidrodinamika* [Ferromagnetohydrodynamics]. Moscow: Mir, 1989, 356 p.
2. Taktarov N. G. *Magnitnaya gidrodinamika* [Magnetic hydrodynamics]. 1975, no. 2, pp. 35–38.
3. Taktarov N. G., Mironova S. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki*. [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 2 (18), pp. 41–48.
4. Mironova S. M., Taktarov N. G. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas]. 2012, no. 4, pp. 104–110.
5. Egereva E. N., Runova O. A., Taktarov N. G. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas]. 2015, no. 1, pp. 182–191.
6. Landau L. D., Lifshits E. M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow: Fizmat-lit, 1986, 735 p.
7. Landau L. D., Lifshits E. M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continuum]. Moscow: Fizmatlit, 2000, 736 p.
8. Kurosh A. G. *Kurs vysshey algebry* [Course of higher algebra]. Moscow: Nauka, 1975, 431 p.

Тактаров Николай Григорьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра математики,
Мордовский государственный
педагогический институт
имени М. Е. Евсевьева (Россия,
г. Саранск, ул. Студенческая, 11а)

E-mail: colonnt@mail.ru

Taktarov Nikolai Grigoryevich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of mathematics, Mordovia State
Pedagogical Institute named after
M. E. Evseyev (11a Studencheskaya
street, Saransk, Russia)

Рунова Ольга Александровна

аспирант, Мордовский государственный
педагогический институт
имени М. Е. Евсевьева (Россия,
г. Саранск, ул. Студенческая, 11а)

E-mail: runova.olga@list.ru

Runova Olga Alexandrovna

Postgraduate student, Mordovia State
Pedagogical Institute named after
M. E. Evseyev (11a Studencheskaya
street, Saransk, Russia)

УДК 533.9:537.84

Тактаров, Н. Г.

Распад цилиндрического столба магнитной жидкости с неоднородным пористым ядром / Н. Г. Тактаров, О. А. Рунова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2015. — № 1 (33). — С. 98–109.